第 I 章

パーコレーションと確率変数

パーコレーションは，相転移の最も簡単なモデルとして知られている．その単純な設定にもかかわらず，統計物理の理論が予言するいろいろな複雑な振る舞いを“実際に計算によって示すことのできるモデル”なので，最近脚光を浴びている．

一方，このモデルは確率論においても新しいタイプの多くの問題を提起してくれており，当然，確率論の研究者の注意をもひいてきた．とくに，ランダムな形についての研究が，このモデルの研究を通して本格的に始まったと言うことができるだろう．そして，パーコレーションを対象とした数学者と物理学者の共同研究が，現在，世界のあちこちにおいておこなわれている．

この章では，確率論の立場からパーコレーションとはどういう問題なのかを考えていくことにする．

1　パーコレーションとは

辞書で Percolation という言葉をひくと，「浸透」「しみ出し」などという訳語が書いてある．いったい，このような言葉でどんな数学の問題を考えようというのか，イメージはわかないことだろう．そこで，少し具体的な例をあげることにしよう．

D. Stauffer は，その著書『浸透理論の基礎』(小田垣孝訳，吉岡書店) の中で，森林火災の広がり方の問題を例としてあげている．森林の中で火災が発生したとき，この火災がどのように燃え広がってゆき，どれくらいの地域を焼き尽くすか，その地域の形の特徴はどのようなものか，……などという問題である．似たような問題として，パーコレーションを数学的問題として提唱した J.M. Hammersley は，果樹園における病害虫の広がり方を例にあげている．ここでは，後者の例を取り上げながら，もう少し詳しくパーコレーションという問題を考えてみよう．

どこまでも広がる果樹園を考えていただこう．落語に出てくる八つぁんや熊さんなら「それが全部桃だったらどうしよう．桃がくさる前に全部食えるかな？」などと余計なことを考えるかもしれないが，この際あまりにリアルなイメージは必要でない．ちょうど碁盤のように縦横に直線が引かれており，それぞれの交点上に 1 本ずつ木が植えてある状態を思い浮かべていただこう．

いま，このうちの 1 本が，ある伝染病にかかったとしよう．病気はまわりに広がってゆく可能性がある．伝染の可能性はもちろん病気の伝染力の強さにもよるが，人間がコントロールできる要素もあるだろう．たとえば，木の間隔を十分大きくとると，病気の伝染の心配は小さくなるだろう．しかし，収穫はできるだけ多くしたいのだから，ここで問題が起こる．できるだけたくさんの木を植え，しかも病気が伝染しにくくなる程度には木と木の間隔をとるとすると，どれくらい間隔をあけるのが一番よいのだろうか？

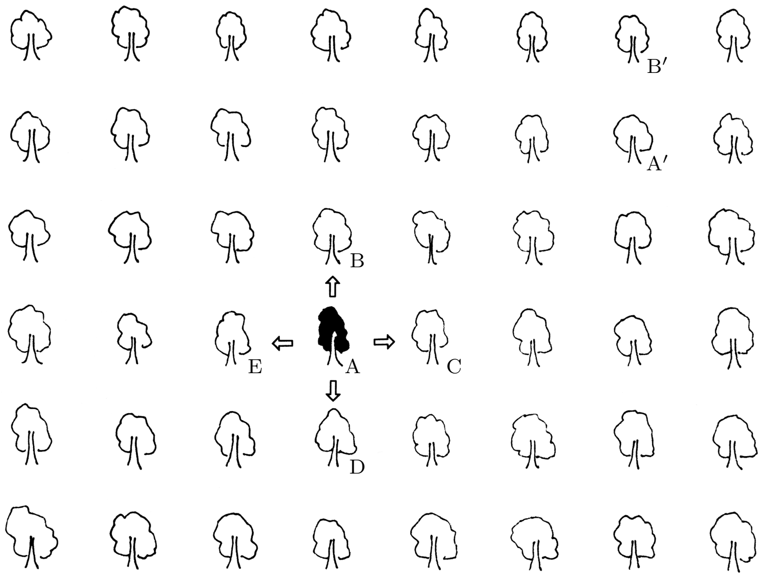

図 1　果樹園．中央の黒い木 A が病気の木で，病気は矢印のように隣の木へ一定の確率で伝染する．

これがパーコレーション問題の一つの例である．もちろん，このままでは病気の伝染力をどうやって表すかが決まっていないので，数学の問題にはなっていない．数学の問題にするために，これからいくつかの「単純化」をおこなう．

1. 病気は隣の木にしか伝染しない．つまり，一度に遠く離れた木に伝染することはなく，次々に隣り合う木を伝って病気は広がってゆくものとする．
2. ある木が病気になったとして，その隣にある木が病気になるかならないかは予測できない．つまり，病気の伝染はランダムに起こるものとする．
3. ある木から隣のある木に伝染する確率は，他の木々の状態には無関係で，どこででも一定である．
4. 果樹園は無限に広い．

このように「単純化」することにより，我々はいろいろなことを計算することができるようになるのだが，もちろんこのような「問題のすりかえ」をやることが気に入らない方もたくさんおられることであろう．そこで，一応，これら 1〜4 の仮定がなぜ出てきたか，その言い訳をしておくことにしよう．

まず，1 の仮定だが，これは我々の経験に照らしてもそう悪い仮定ではないだろう．病人に一番近い人が一番伝染しやすいからだ．ひょっとすると，隣に座った人は病気ではなく，そのもう一つ隣の人から直接に病気をうつされるかもしれないが，この可能性を考えることは問題を複雑にするので，いまは考えない．ただし，問題を一般化することで，伝染の仕方についてはいろいろなケースを考えることができるようになるので，その意味でも 1 の仮定は気楽に考えておいてよい．

次に仮定の 2 と 3 だが，これは本質的な仮定であり，要するに，「何が起こるかわからない」場合はランダムな現象と理解しようということだ．つまり，起こりうるケースそれぞれの確率を統計的に得ることによって，確率的に予測ができるという思想に基づいている．A という木から B という隣の木に伝染するか否かは，神様だけが前もって知っているというわけだ．また，A, B から離れた A′, B′ という隣り合う木の間で伝染するか否かは，A と B とで伝染するか否かと同じくらい予測できないものだから，伝染する確率はどこでも同じと考えてよいだろう(図 1)．さて，A という木が病気になったとき，B, C, D, E という隣の木に伝染する確率が互いに独立にそれぞれ p で与えられているとする．(この確率がどうやって決まるかはいまは問わない．それは統計的に決まるものだとしておこう.) したがって，たとえばこのうちのちょうど 2 本の木に伝染する確率は，4 本のうち病気になる 2 本を指定する場合の数が $\binom{4}{2} = 6$ なのだから [1]，

---

[1]　高校の教科書などではこの場合の数は ${}_4\mathrm{C}_2$ と書くことが多いが，上の書き方 $\binom{4}{2}$ の方がインターナショナルだと思う．念のためだが，$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ であることをつけ加えておこう．

$$\binom{4}{2}p^2(1-p)^2 \;=\; 6p^2(1-p)^2,$$

ちょうど 3 本の木に伝染する確率は，同様にして

$$\binom{4}{3}p^3(1-p) \;=\; 4p^3(1-p)$$

というように決まる．したがって，4 本全部に伝染する確率は p^4 となる．現実の統計ではたぶんこのようにきれいな形ではなく，たとえばまわりの木全部に伝染する確率は伝染力が弱いとき（$p \sim 0$ のとき）

$$p^4 + o(p^4)$$

という形をとるものと思われる．（$o(p^4)$ は p^4 で割って $p \to 0$ としたとき 0 に収束することを意味している.） このような意味で，我々の独立性の仮定は第 1 近似を与えていると言うことができる.（実は，現実にこのような統計があるのかどうか筆者は知らない．だが，こう考えるとちょっとはもっともらしく見えるから，そう悪い仮定でもないだろう.）

最後の仮定 4 は，こうする方が数学的にいろいろと見やすい結果が得られるからで，現実には果樹園は有限の広さなのだから，量的な関係（たとえばある 1 本の木に発生した伝染病にかかった木の総本数と果樹園内の木の総本数の比など）が重要なのだが，このような話は難しいのでこの本では考えない.

果樹園が無限に広がっていると仮定したことにより，我々は次のように問題を設定することができる.

問題　果樹園内のある 1 本の木に発生した病気が無限に遠くまで広がっていくことがあるか？ 広がっていくとしたら，その確率はどれくらいあるか？ また，この無限に広がる確率は，最初に与えた確率 p が変化するとき，どのように変化するか？ さらに，病気にかかった木の総本数の期待値は p の値とともにどのように変化するか？

2　パーコレーションの数学モデル

前の節で述べたことを，記号を用いながら整理していくことにしよう．本来は「確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$」というものを最初に導入した方が議論がスッキリするのだが，いましばらくは，より直観に訴えるために確率論特有の言い回しは避けることにする．

果樹園に植えられた木の全体は，無限に広がる碁盤の縦・横の直線の交点の全体によって表されるのだから，原点となる木（これはこちらで勝手に決める）から考えて，縦・横何番目にあるかを示す整数の組

$$\boldsymbol{Z}^2 = \{(n,m)\,;\, n,m \text{ は整数}\}$$

によって，果樹園の木全体が表される．上の $\boldsymbol{Z}^2$ は**平面正方格子**と呼ばれる．簡単に書いてよいときは，$\boldsymbol{Z}^2$ の元は $x, y, z, u, v, x_1, x_2, \ldots$ などと表すことにする．$\boldsymbol{Z}^2$ の元 (n,m) を，それが対応している木と同一視して，木 (n,m) と呼ぶことにしよう．木 (n,m) と木 (n',m') が隣り合うということは，

$$|n-n'| + |m-m'| = 1 \tag{2.1}$$

という式によって表すことができる．2 本の木 (n,m) と (n',m') が隣り合っているとき，いまどちらかの木が病気になったとして，もう一方の木にこの病気がうつるか否かはランダムに決まる．その伝染する確率だけを我々は知っているのだが，神様にはこの 2 本の木の間に病気が伝染するか否かはわかっている．最終的には病気がどのように伝染したかは我々にもわかるわけで，それに基づいて図をかくことができる．図 2 を見ていただこう．

図 2 は原点 O から始まった病気が伝染した経路を図示したものである．閉じたループができているところは，枝分かれのところで病気が二つ以上の方向へ伝染したことを意味する．破線は，それで結ばれている二つの隣り合う木の間に直接の伝染はなかったことを意味する．

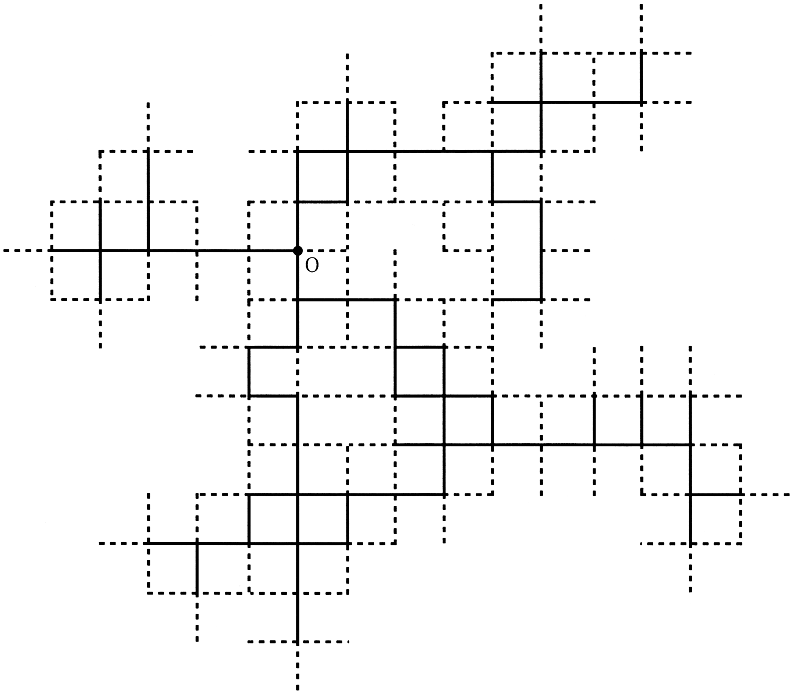

図 2

我々はこの図のような結果を「すべてが終わったあとに」知るわけだが，神様には最初からわかっていたことなのである．この神様が知っていたことを表すためには，何が必要となるかを考えてみよう．というと何だか話が大げさになるが，要するにすべての $\boldsymbol{Z}^2$ の隣り合う木の組 $\{(n,m),(n',m')\}$ ((n,m) と (n',m') は (2.1) 式をみたす) に対して，この 2 本の木の間に病気が直接伝染するか否かを決める量を導入するわけだ．(2.1) をみたす組 $\{(n,m),(n',m')\}$ を $\boldsymbol{Z}^2$ の**ボンド**と呼び，$\boldsymbol{Z}^2$ のボンドの全体を $\boldsymbol{B}^2$ と書くことにする．

(2.2) $$\boldsymbol{B}^2 = \{\{(n,m),(n',m')\} \subset \boldsymbol{Z}^2\,;\,(2.1)\text{ が成立}\}$$

となるわけである．簡単に書いてよいときは，$\boldsymbol{B}^2$ の元は $b, b', b'', \ldots, b_1, b_2, \ldots$

などで表すことにする．

さて，各 $b \in \boldsymbol{B}^2$ に対してランダムに 0 または 1 をとる変数 X_b を考える．X_b はボンド b を伝って病気が伝染するとき 1，そうでないとき 0 をとるものとする．これが，例の「神様だけが知っている」量である．1〜4 の仮定に従って，この X_b 達の性質をまとめておこう．

まず，各 X_b は他の $X_{b'}$ 達とは独立に，確率 p で 1 となり，確率 $1-p$ で 0 となる．したがって，たとえば $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset \boldsymbol{B}^2$ を相異なる n 個のボンドとするとき，

$$P\begin{pmatrix} X_{b_1} = X_{b_2} = \cdots = X_{b_k} = 1, \\ X_{b_{k+1}} = \cdots = X_{b_n} = 0 \end{pmatrix} = p^k(1-p)^{n-k} \tag{2.3}$$

となる．$P(A)$ は A が起こる確率を表すものとする．

$X_b = 1$ のとき「ボンド b は開いている」といい，$X_b = 0$ のとき「ボンド b は閉じている」という．このような言い方をしておく方があとで便利なことが多い．すると，病気は開いたボンドを伝って伝染していくということになる．

さて，このように言葉を準備したとき，果樹園内のある木（これを原点にするような座標を入れておくことにしよう）から発生した病気が，最終的にどれだけの木を病気にするかは「神様だけが前もって知っている」開いたボンドの配置の仕方によって決まる．つまり，開いたボンドだけを使って原点からつなぐことのできる点の全体が，最終的に病気になった木の全体に対応することになる．これを $\overline{C_{\mathrm{O}}}$ と書くことにする．$\overline{C_{\mathrm{O}}}$ を（原点の）**開クラスター**と呼ぶことにする．数学的にきちんとした定義をするためには，連結性の定義から始める必要がある．

定義 1　$A \subset \boldsymbol{B}^2$ に対し，$A \neq \emptyset$ のとき，$\overline{A} \subset \boldsymbol{Z}^2$ を

$$\overline{A} = \{x \in \boldsymbol{Z}^2;\ \text{ある } b \in A \text{ があって } x \in b\} \tag{2.4}$$

によって定める．$\overline{A}$ のどの点も A のあるボンド b に含まれる．

［注］ボンドの集合 A に対して，$\overline{A}$ は A に関する点の全体とでもいうべき集合である．別の見方をすれば，A のそれぞれのボンドを $\boldsymbol{Z}^2$ の部分集合とみることができ，$\overline{A}$ はこのとき A に属するボンド全部の合併として表される．

ときとして $b=\{(n,m),(n',m')\}\in\boldsymbol{B}^2$ を (n,m) と (n',m') を結ぶ線分と考えることがある．この方が図形的なイメージが得られるからである．次の連結性も，このように線分と考えるとわかりやすいだろう．

定義 2　$A\subset\boldsymbol{B}^2$ が連結であるとは，任意の $x,y\in\overline{A}$ に対して，$b_1,b_2,\ldots,b_n\in A$ がとれて

(2.5-a)　　$b_1\ni x$　かつ　$b_n\ni y$，

(2.5-b)　　任意の $1\le i\le n-1$ に対して，$\boldsymbol{Z}^2$ のある点 x_i がとれて，
b_i および b_{i+1} は x_i を共有する，

の二つの条件をみたすことをいう(図 3)．

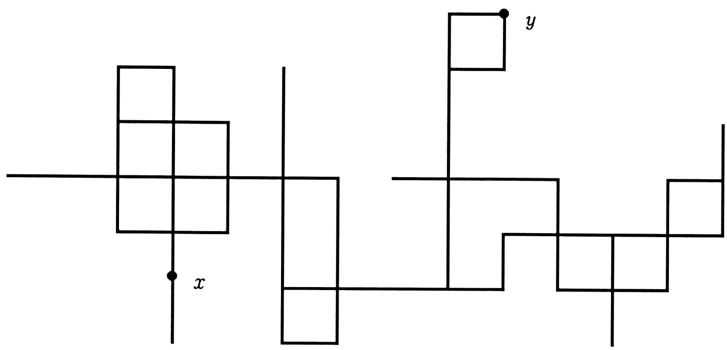

図 3　連結な図形の例．

定義 3　$A\subset \boldsymbol{B}^2$ に対し，$C\subset A$ が A の**連結成分**であるとは，次の二つの条件をみたすときにいう．

(2.6-a)　　C は連結であり，

(2.6-b)　　任意の $b\in A\diagdown C$ に対して，$C\cup\{b\}$ は連結でない．

［注］ 要するに，A はいくつかのかたまりに分かれ，そのかたまりの一つ一つはつながっている(連結になっている)．かたまり同士は相互につながってはいない．このとき，このかたまりを連結成分と呼ぶわけである．

さて，ランダムに値を決める変数達 $\{X_b\,;\,b\in\boldsymbol{B}^2\}$ について，その値が 1 になるようなボンド b の集合（これもランダムに決まる）を S と書いておこう．S は $\boldsymbol{B}^2$ の部分集合なので，S の原点を含む連結成分を C_{O} と書く．も

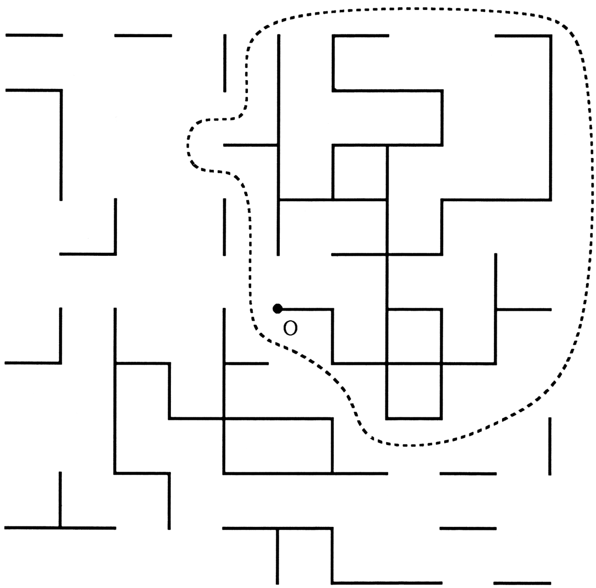

図 4　ランダムな図形 S と C_{O}.
実線のボンドの集合 S と，このときの C_{O}（破線で囲まれた部分）.

しも，$b \ni \mathrm{O}$ となるすべてのボンド b に対して $X_b = 0$ となっているときは，$C_{\mathrm{O}} = \emptyset$ と理解することにする．ただし，C_{O} の定義の意味から，$\overline{C_{\mathrm{O}}} \ni \mathrm{O}$ はつねに成り立つと理解した方がよいので，$C_{\mathrm{O}} = \emptyset$ ならば $\overline{C_{\mathrm{O}}} = \{\mathrm{O}\}$ と約束する．

これで，一応，$C_{\mathrm{O}}, \overline{C_{\mathrm{O}}}$ の定義ができたので，我々の問題は次のように言い直すことができる．

問題　$P_p(|\overline{C_{\mathrm{O}}}| = \infty)$ $(= \theta(p)$ とおく$)$ は p のどのような関数になるか？

ただし，$A \subset \boldsymbol{B}^2$ に対して，$|\overline{A}|$ は $\overline{A}$ に属する点の個数とする．ついでに，$\|A\|$ で A に属するボンドの個数を表すことを約束しておこう．また，$p \in [0,1]$ のとき，各ボンドが開いている確率が p であることをはっきりさせるため，以下では P の右下に p をつけて P_p と表示することにする．つまり，

$$\theta(p) \,=\, P_p(|\overline{C_{\mathrm{O}}}| = \infty)$$

と書くわけである．P_p と書いたら $\{X_b\,;\, b \in \boldsymbol{B}^2\}$ を考えており，各 X_b が 1 になる確率は独立に p であることを約束してますヨと言っていることに注意していただきたい．

3　確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と確率変数

ここまで読んできて，ランダムとか独立とか確率とかいう言葉が定義もなしに出てきていることにスッキリしない方もおられるだろう．そろそろきちんとした確率論の概念を導入しておくときがきたようだ．ここでは上のような言葉で意味するものを，数学的な対象として定めることにする．まず，ランダムという言葉を記述するために，確率空間というものから定義する．