
MTFの話

2020年10月16日
すばる天文同好会
舟越 和己

目次

<目次>

はじめに

1. 結像システムの話

2. 空間周波数とコントラスト

2. 1 空間周波数の単位

2. 2 空間周波数の例

2. 3 コントラストの数値化

2. 4 回折像の畳み込みによるコントラストの低下

2. 5 空間周波数と天体望遠鏡

3. MTFチャート

4. MTFチャートの例とその見方

5. まとめ

はじめに

■MTFは、

Modulation Transfer Function (変調伝達関数) の略で、天体望遠鏡の光学系の評価として、「対象天体の持つコントラストを天体望遠鏡がどの程度再現できるかを表現するため」に使われます。

MTFについては天文年鑑でも触れられていますが (P.321)、MTFの概念や仕組みの説明は国内の天文書では見当たらないようです。

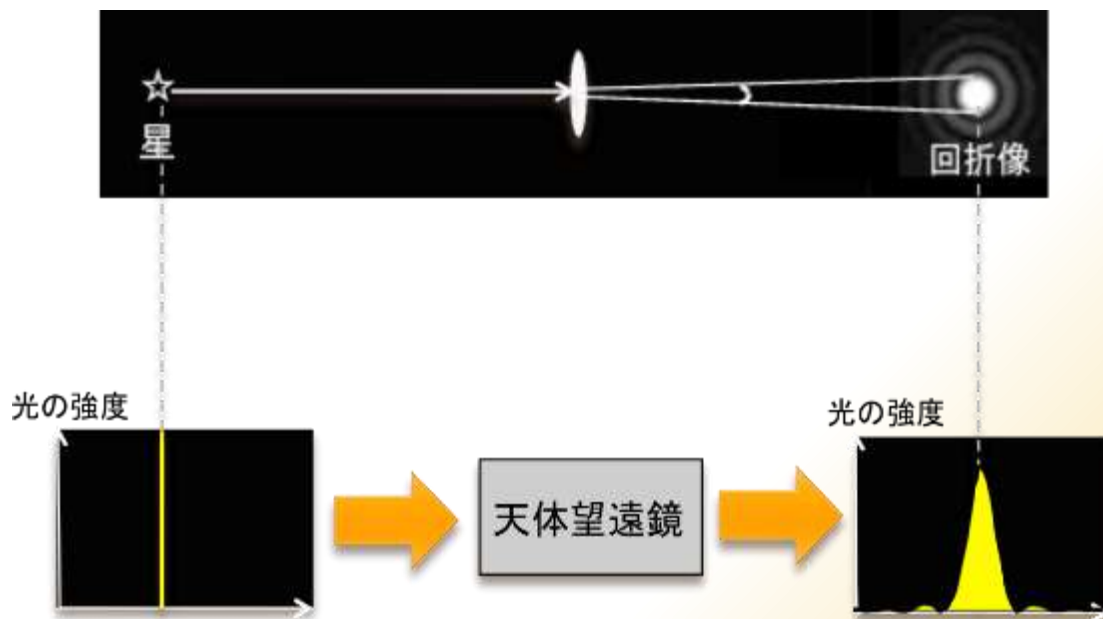
そこで、「MTFとは何か？」についてネットや海外の天文書で少し調べましたので簡単に紹介します。

1. 結像システムの話：点光源

■星からの光が天体望遠鏡によりどんな像を結ぶかについて考えます。点光源である星を高倍率の天体望遠鏡で見ると、光の回折現象により星の回折像が見えます(図の上部分)。

これを光の強度(注)分布で見ると、星の方は1点の上に伸びる直線となり、回折像の方は裾が広がります(図の下部分)。

(注)光のエネルギー量で、光の振幅の二乗に比例。



1. 結像システムの話：光源の数が増えたら

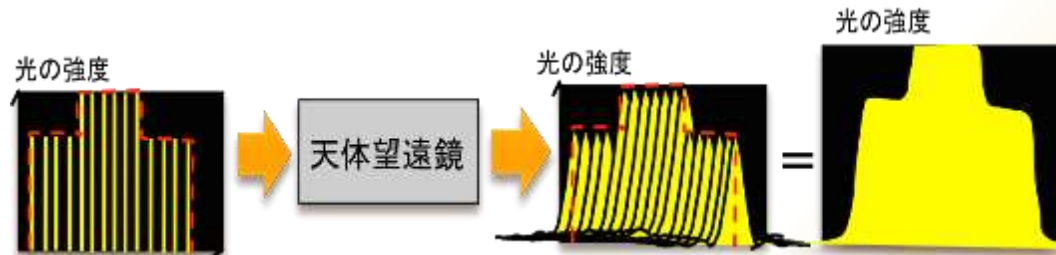
■今度は光源の数が増えたらどうなるかを見てみます。

このとき天体望遠鏡による像は、各点光源の像である回折像の強度の集りとなります。

例えば、下の図の左のように接近した多数の点光源があり、光の強度分布が途中で変化する場合があります。

多数の点光源からの光は、望遠鏡により多数の回折像となって重なります。

重なりを合成した結果は、図の右端のように裾が広がります。



1. 結像システムの話：連続的に光る光源

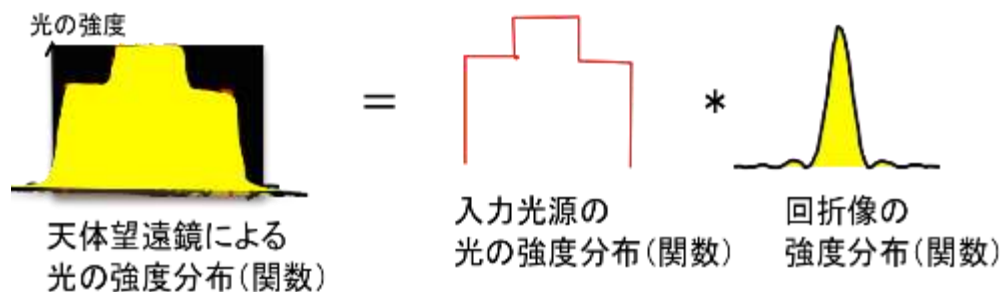
■次に、多数の光源を無数に増やすと、連続的に光る光源となります(下の図の左)。

このとき、これの天体望遠鏡による光の強度分布は、(2)の場合と同様に裾が広がります(下の図の右)。



1. 結像システムの話：広がりのある天体の光

■ 月や惑星などの広がりのある天体(extended objects)が発する光は、このように無数の点光源からの光の集りであると考えます。その光の強度が天体望遠鏡によりどう変わるかを求めるためには、下の図のように、入力光源の光の強度分布に回折像の光の強度分布を連続的に作用(*)させます。



ここで、(*)という作用の意味は入力光源の各点に対して回折像の強度分布を重ねて加えていくことです。これは一方の関数を少しずつずらして、もう一方の関数に重ね加える操作を意味し、数学では「畳み込み(convolution)」(注)と言います。

(注)「畳み込み計算」については後ろの(参考)を参照。

1. 結像システムの話：点光源の分解能

■ 恒星と広がりのある天体

- ・恒星は点光源（面積のない光源）

一方、

- ・広がりのある天体（月、惑星、星雲など）は面積のある光源

■ 恒星の分解能

接近した二重星を高倍率で見ると、2つの星の回折像が接近して見えます。

二重星を見分けられる限界でよく使われるのはドーズリミットです。これは天体望遠鏡のカタログの分解能として使われます；

$$\text{ドーズリミット(秒角)} = 116/D \quad (D: \text{口径(mm)})$$

例えば、口径 $D=100\text{mm}$ の天体望遠鏡では、ドーズリミット $=116/100=1.16$ 秒角です。

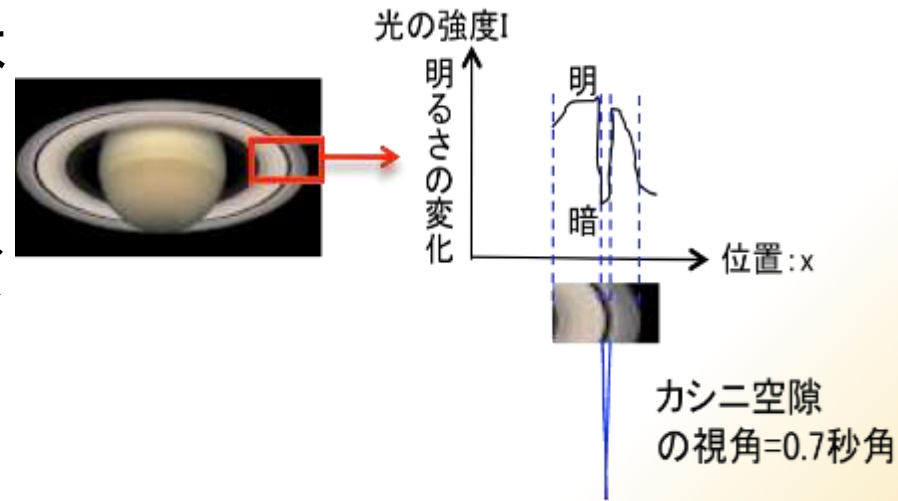


1. 結像システムの話：広がりのある天体の分解能

■ 広がりのある天体の分解能

例えば、土星のカシニ空隙の幅は約0.7秒角です。

これは10cmのドーズリミットよりも小さな値ですが、条件が良ければカシニ空隙は6cmの望遠鏡でも見ることが可能です。



このように、惑星の表面の模様のような「**広がりのある天体 (extended objects)**」の見え方は恒星のような点光源とは別の評価が必要になります。

1. 結像システムの話：対象のコントラスト

■望遠鏡で**広がりのある天体**がよく見える、見えないとはどういうことでしょうか？

→これは、対象の大きさとコントラストの問題です。

対象の大小はもちろんですが、コントラストについては

●コントラストが高い→良く見える。

(例)・月面の明暗境界線付近のクレーター

・木星の衛星の木星本体への影

・土星のカシニ空隙

●コントラストが低い→見えにくい

(例)・満月のときのクレーター(明るい周辺とのコントラストが低い)

・木星のフェストーン

・星雲(背景の空とのコントラストが低い)

2. 空間周波数とコントラスト(1)

■ 月や惑星の表面、あるいは星雲など面積のある天体は様々なサイズやコントラストの模様を持ちますが、これらは

- ①粗い明暗模様
- ②細かい明暗模様
- ③高コントラストの明暗模様
- ④低コントラストの明暗模様

という4つのパターンの複合的組合せと考えることができます。

例えば、

- ・月の明暗境界線付近のクレーターなどはコントラストが高く、地形の大小により粗い模様から細かい模様まであります。
- 木星のフェストーンはコントラストが低く、細かい模様です。

2. 空間周波数とコントラスト(2)

■ここで、「空間周波数(spatial frequency)」という概念が登場します。

空間周波数とは、

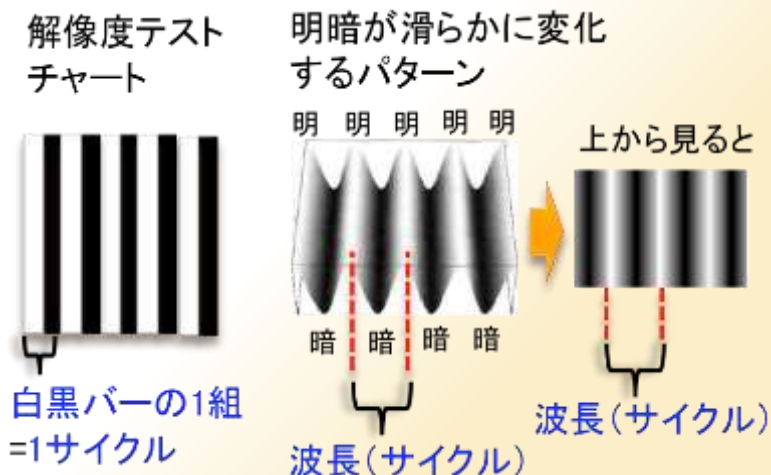
「縞模様のような空間的な周期的構造における、
単位長さ(又は単位角度)あたりに含まれる
構造の繰り返し数」

と定義されています。

■「空間的な周期的構造」の例としては、図のような「白黒バーの繰り返し」や「明暗が滑らかに変化するパターンの繰り返し(正弦波)」があります(右図)。

明暗の1組が正弦波の1波長に該当するので、「明暗の1組」を1サイクルと呼びます。

本資料では、以降、空間的な周期的構造は正弦波とします。

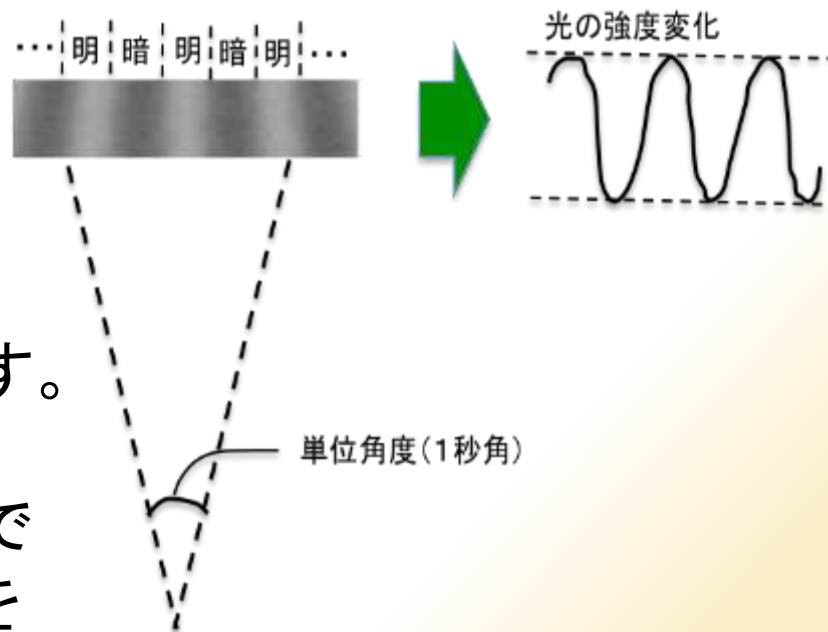


2. 1 空間周波数の単位

■今、図のような「明暗明暗・・・」という光の強度分布の対象を望遠鏡で見たとします。

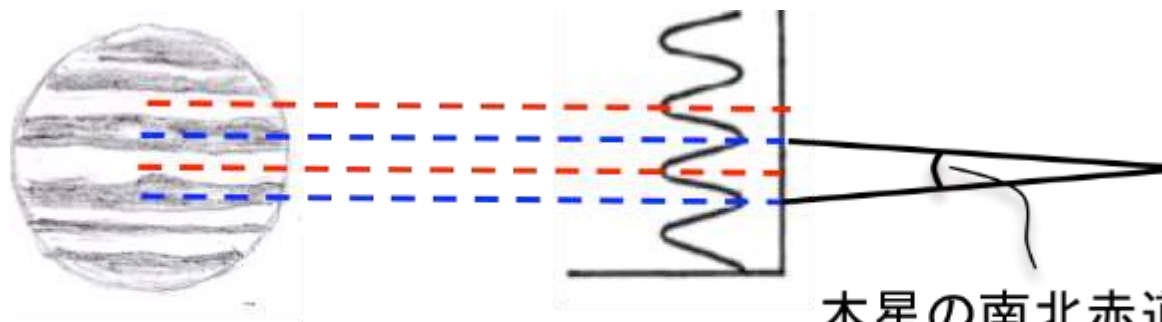
天体は大きさを角度で測るので、空間周波数の単位は、単位角度(1秒角)内に数えられるサイクル数、即ちサイクル/秒角です。

一方、カメラレンズのように焦点面で単位長さ(1mm)当りの空間周波数を考えたい場合は、[サイクル/mm]、又は白黒を1本として[本/mm]が単位となります。



2. 2 空間周波数の例

■木星の南北赤道縞の空間周波数は下のように約0.1サイクル/秒となりします。

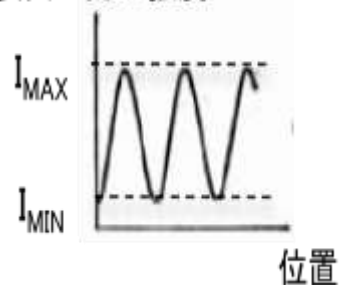


木星の南北赤道帯；
1サイクル=約10秒角
→0.1サイクル/秒角

2. 3 コントラストの数値化

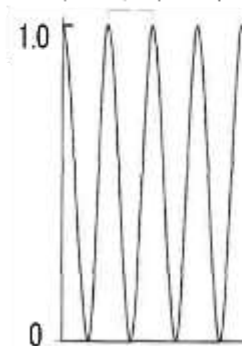
- 次に、明暗の差=コントラストを数値化により定義します。
光の強度が I_{MAX} と I_{MIN} の間で明暗を繰り返す正弦波としたとき、
コントラスト C は次の右の式で定義されます(Michelson Contrast)。

表面の光の強度 I

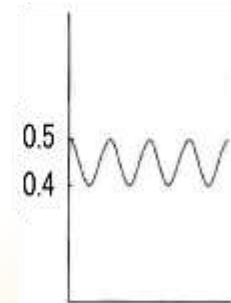


$$C = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}}$$

(例1) $I_{MAX} = 1.0, I_{MIN} = 0$ とすると $C = (1-0)/(1+0) = 1.0$



(例2) $I_{MAX} = 0.6, I_{MIN} = 0.4$ とすると $C = (0.5-0.4)/(0.5+0.4) = 1/9 = 0.11$



C の値は $0 \leq C \leq 1$ で、 C の値が小さいほどコントラストは低下します。

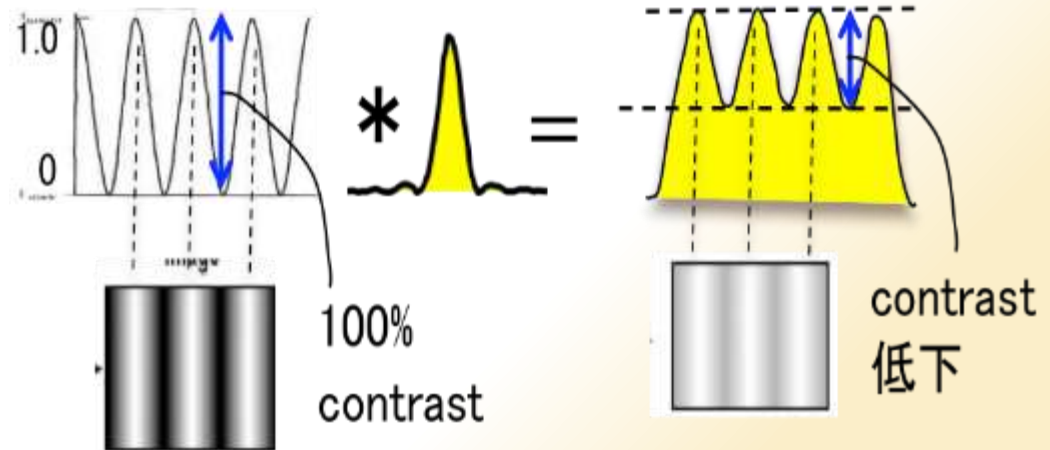
2. 4 回折像の畳み込みによるコントラストの低下

■コントラスト $C=1.0$ の対象を天体望遠鏡で見た場合、その出力は「対象に回折像の強度分布を重ねて加えていく」ことでした。したがって、下の図のように、回折像の裾の広がりや影響して出力の分布の下の方が重なり、その部分がコントラストに寄与しなくなることで、出力のコントラストが低下します(これを正確に求めるには畳み込みの計算が必要ですが、ここでは省略します)。

コントラストの低下は、入力の空間周波数が高いほど回折像の影響を受け顕著になります。

また、畳み込みの計算で使用される回折像の形状も出力のコントラストに影響

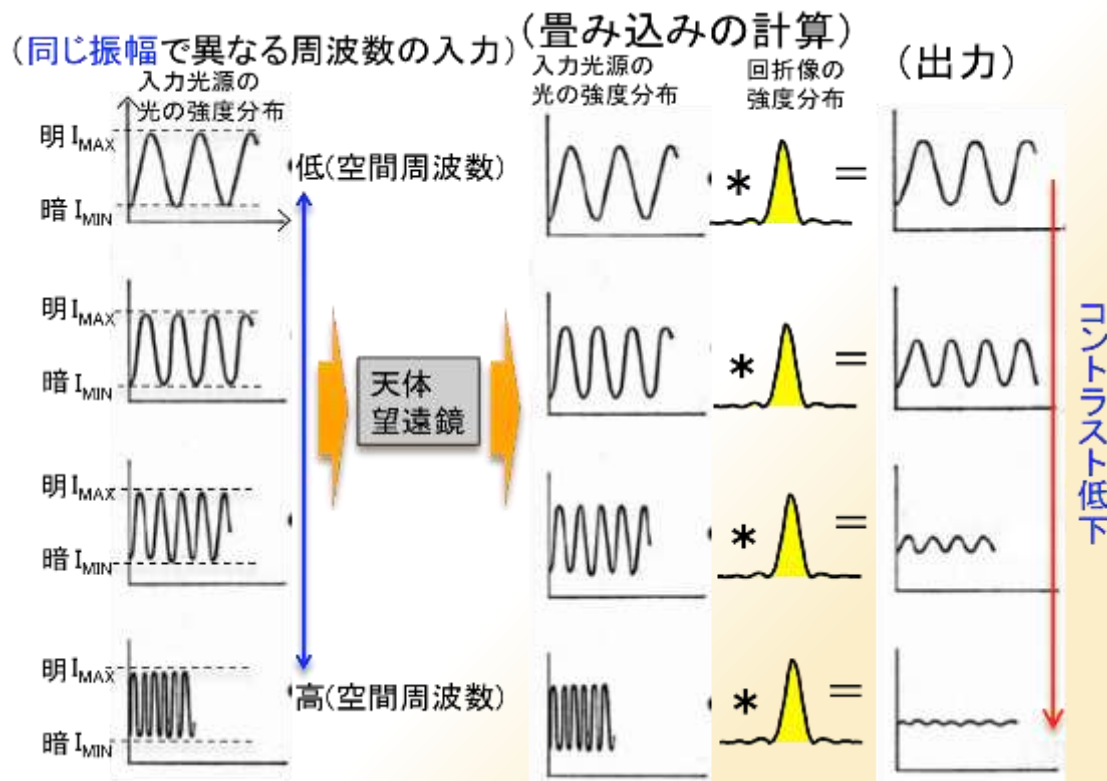
します。収差のある光学系の望遠鏡の回折像は、コントラストを低下させます。



2. 5 空間周波数と天体望遠鏡

■これまでの議論から、コントラストが同じで空間周波数の異なる明暗模様を天体望遠鏡で見たらどうなるかを図に示すと、「空間周波数が高い(=細かな模様)対象ほどそれを天体望遠鏡で見ると、像のコントラストが低下していく」ことになります(下の図)。

このような空間周波数の変化に対して、出力のコントラストの値の変化を対応させたものを、Modulation Transfer Function(MTF: 変調伝達関数)と言います。



3. MTFチャート(1)

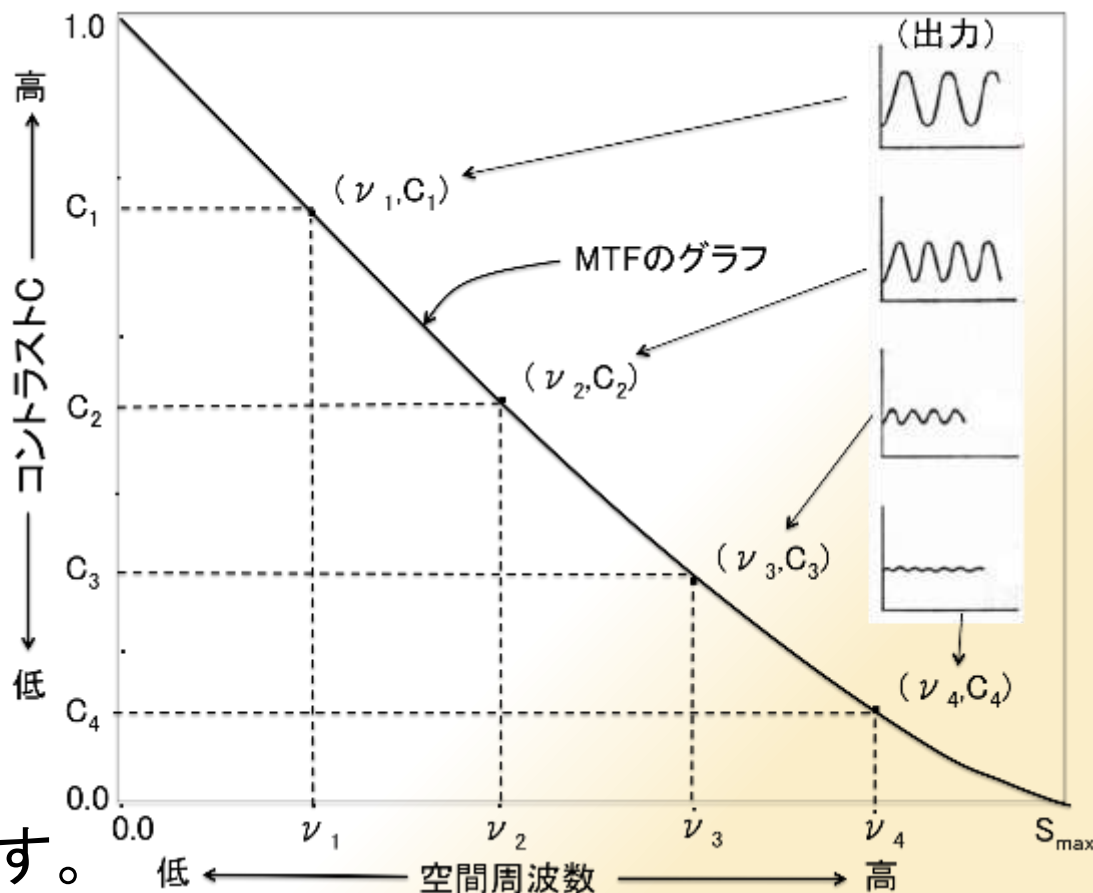
■ 入力のコントラストCは全て1.0の場合を考えます。また、空間周波数 ν は $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \nu_4$ と増加するとします。

このとき、天体望遠鏡による出力は、空間周波数に対応するコントラストが低下します。

それを $C_1 > C_2 > C_3 > C_4$ とします。

このとき、出力の空間周波数 ν を横軸、出力のコントラストCを縦軸にしたグラフを描くと右図のような減少関数になります。

これをMTFチャートと言います。



3. MTFチャート(2)

- MTFチャートでは空間周波数が高くなるとコントラストが低下していきませんが、コントラストが0に低下する空間周波数(横軸の右端。これを「最大空間周波数 S_{max} 」又は「遮断空間周波数」と言います)はどうすれば決まるのでしょうか？
これは簡単に言えば、
「入力の周波数が高くなり、明暗の1サイクルが回折像のエアリーディスクの半径以下に収まるほどになったとき」です。

3. MTFチャート(3)

■ S_{max} は、天体望遠鏡の口径を D 、光の波長を λ とするとき、

$$S_{max} = D / \lambda \text{ [サイクル/radian]}$$

$$= (D / \lambda) * (\pi / 180) * (1 / 3600) \text{ [サイクル/秒角]}$$

一方、単位を[サイクル/mm]とした場合の最大空間周波数 S'_{max} は、天体望遠鏡の焦点比を F とすると、

$$S'_{max} = 1 / (F * \lambda) \text{ [サイクル/mm]}$$

となります。

【最大空間周波数 S_{max} の例】

光の波長を $\lambda = 550\text{nm} = 5.5 \times 10^{-4}\text{mm}$ とすると、

・ $D = 200\text{mm}$ のとき、 $S_{max} = 1.76$ [サイクル/秒角]

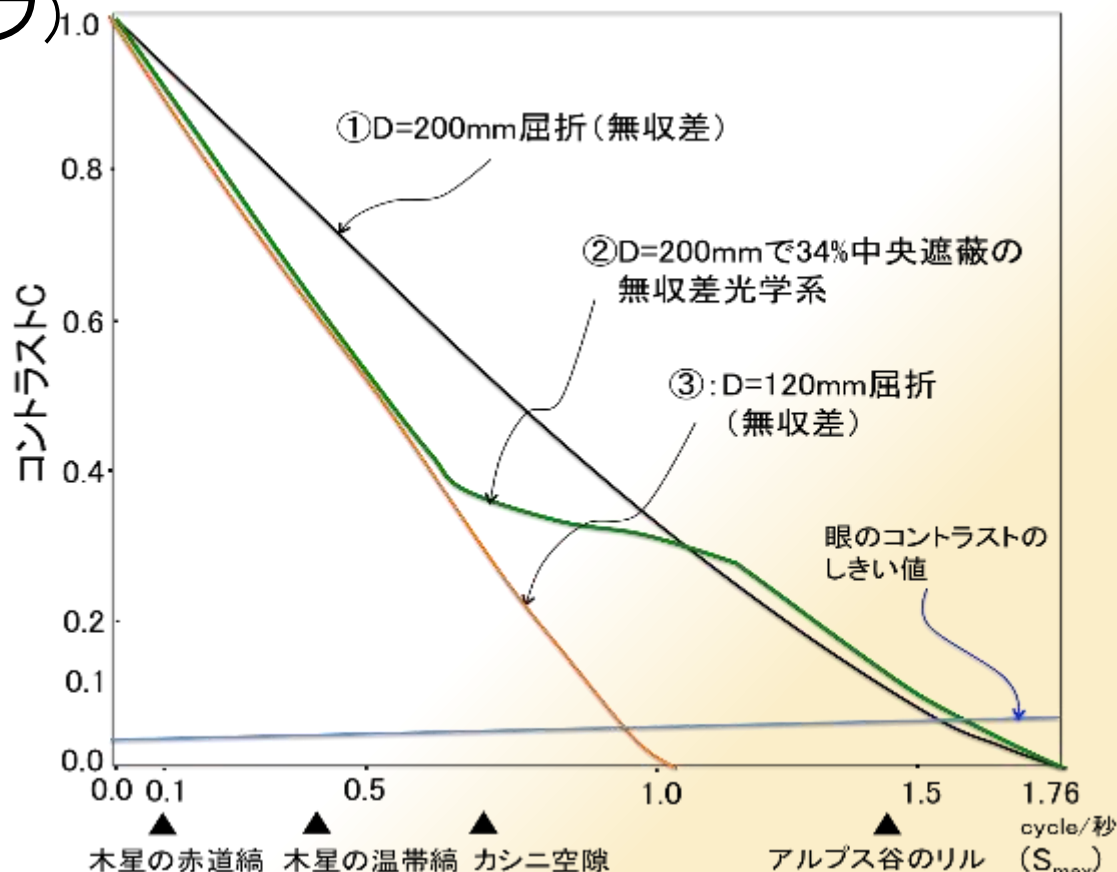
・ $F = 10$ のとき、 $S'_{max} = 182$ [サイクル/mm]

4. MTFチャートの例とその見方(1)

【例1】下の図は、下記の3種類の望遠鏡のMTFチャートです(注)。

- ①口径D=200mmの無収差の屈折望遠鏡
- ②口径D=200mmの中央遮蔽率34%の無収差の望遠鏡(例: ニュートン、シュミカセ、マクストフ)
- ③口径D=120mmの無収差の屈折望遠鏡

(注)チャート図は
参考資料3 “How to
understand an MTF
Chart” より



4. MTFチャートの例とその見方(2)

■横軸の空間周波数の $S_{max}=1.76$ サイクル/秒は、 $D=200\text{mm}$ の望遠鏡の最大空間周波数です。

下の方にある斜めの直線は、明るい天体に対して眼が識別可能なコントラストの最低ラインです。また、横軸の下に木星の縞模様と土星のカシニ空隙、及び月面のアルプス谷のリル(中央溝)の空間周波数のおおよその位置を▲印で参考に載せています。

図の①は、コントラスト $C=1.0$ の対象を無遮蔽の完全な光学系の望遠鏡で見たときのMTFです。

②は $C=1.0$ の対象を34%中央遮蔽の完全な光学系の望遠鏡で見たときのMTFです。

この図を見ると、空間周波数が低位～中位では②のコントラストが①より低下します。一方、高い空間周波数に対する解像力は、②の方が①よりも僅かに良くなっています。

4. MTFチャートの例とその見方(3)

■③はD=120mmの望遠鏡なので、この望遠鏡の

$S_{max}=1.76*120/200=1.1$ サイクル/秒です。

ここで注目すべきは、②と③のカーブを比較したとき、D=200mmの34%中央遮蔽の望遠鏡のコントラスト低下率は、途中までD=120mm屈折とほぼ同じということです。従って木星の縞模様の②と③の望遠鏡での見え方(コントラスト)は同程度です。他方、空間周波数が高い月面のアルプス谷のリルは、①②では見るのが可能ですが③では見えません。

4. MTFチャートの例とその見方(4)

【例2】アポダイジングスクリーンの評価

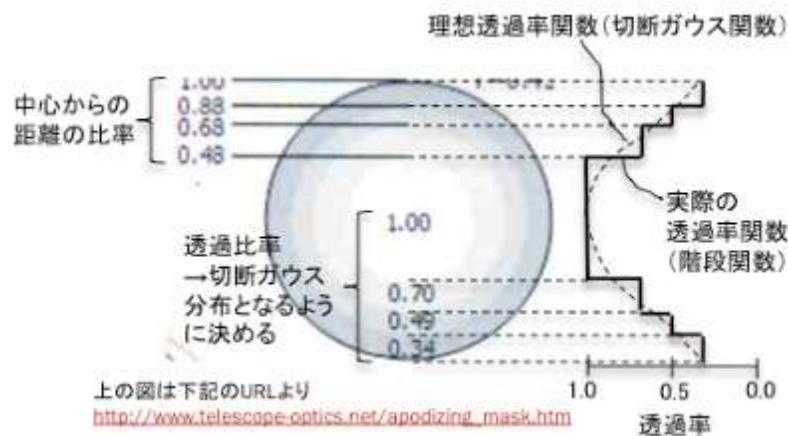
アポダイジングスクリーンとは、望遠鏡の筒先につける「透過率が周辺に行くほど低下するように網目などで作られたスクリーン」のことです。



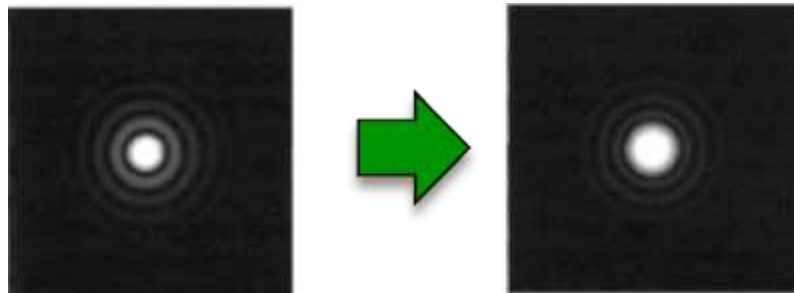
上の図は下記のURLより:

http://revans_01420.webs.com

[/apps/photos/photo?photoid=36951464](http://apps/photos/photo?photoid=36951464)



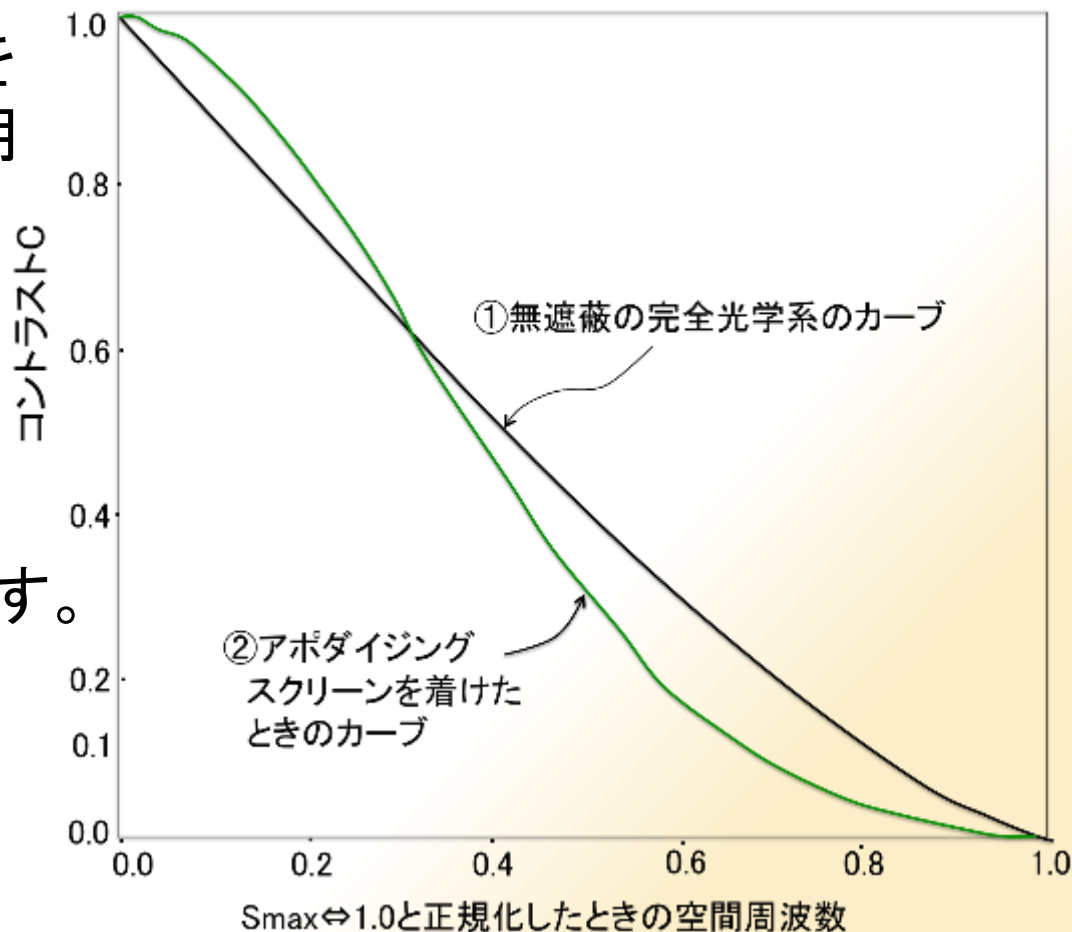
これにより、星の回折像は下の図の右のように回折リングが弱められます(その代り中央のエアリーディスクは肥大します)。



4. MTFチャートの例とその見方(5)

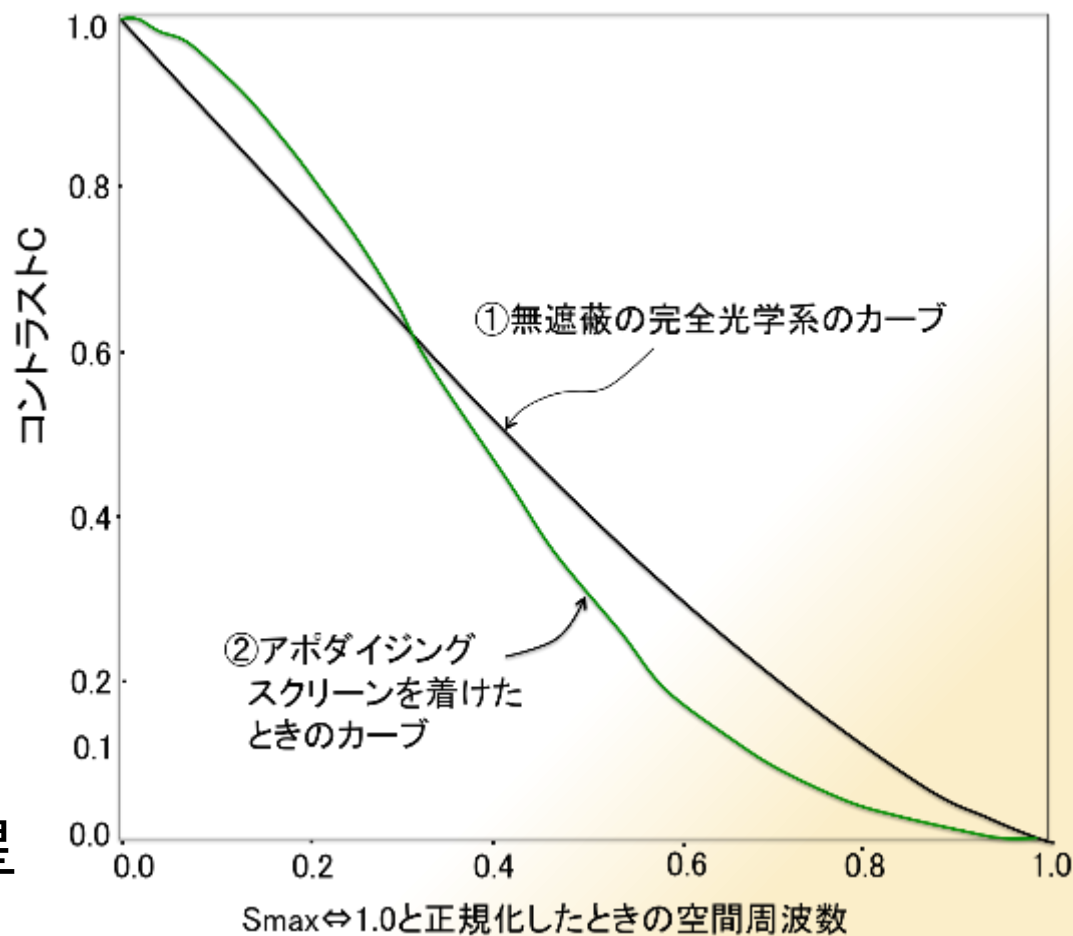
■アポダイジングスクリーンの効果をMTFチャートで示すと図のようになります。

横軸の空間周波数は S_{max} を1.0として正規化した値を使用しています。この図を見ると、アポダイジングスクリーンを着けた望遠鏡は、高い空間周波数ではコントラストが低下しますが、低い方ではコントラストが高くなっています。



4. MTFチャートの例とその見方(6)

■例1の木星の縞模様の空間周波数を見ても分かるように、 $D=20\text{cm}$ の望遠鏡では木星など惑星の主要な模様は大部分が低い方の周波数領域に属するのでアポダイジングスクリーン使用はコントラスト向上に有効です。
また、弱められた回折リングは、回折リングにより伴星が見え難いような不等光二重星の分離に有効です。



5. まとめ

■以上、MTFとそのチャートの概要を述べました。ここで述べた例以外に、MTFチャートは様々な収差の比較などに適用できます。最後に、MTFの特徴を述べた参考資料1の一文を紹介します；

「光学品質を示す最も完璧な方法は、詳細な変調伝達関数(MTF)を示すことです。これは、光学システムがいろいろな間隔のバーのパターンのコントラストを保つ能力のことです。どんな光学的な難点もMTFから逃れることはできません。埃っぽい光学系、光学表面上のくぼみ、スパイダーの回折、光学面の小規模の荒れ、収差、そしてその他の障害物は、それらが低位の伝達関数に位置することを明らかにします。(Star Testing 第1章 1.2節より)」

<補足> 写真用レンズの評価で使われるMTF

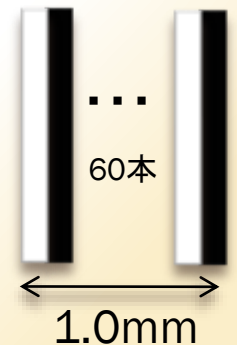
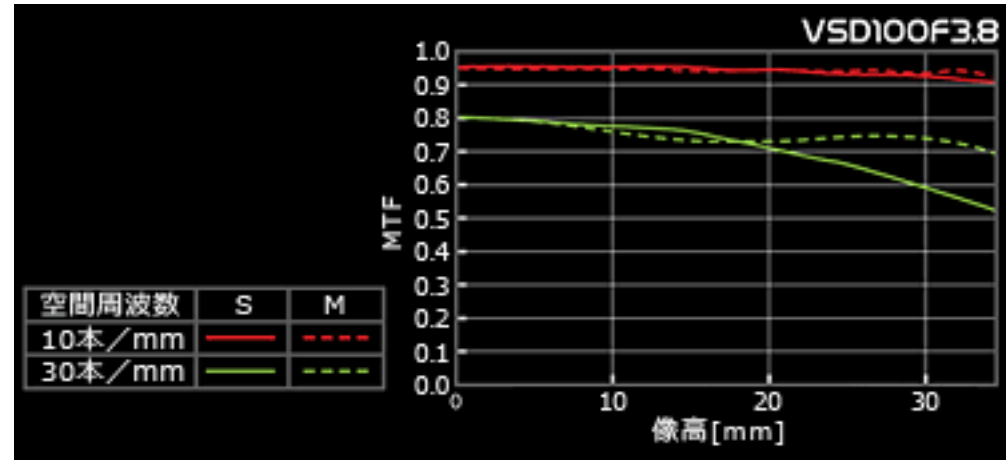
■ 右図はアストロカメラ用レンズのMTFチャートです。

・横軸は「像高(mm)」、即ち画像の中心からの高さです。

・縦軸はMTF、即ち入出力のコントラスト比です。

・空間周波数の単位は(本/mm)となっています。これは、1mmあたりの白黒ラインの組の数を意味します。右図の例は、60本/mmです。

→このMTFチャートでは、空間周波数は10本/mm, 30本/mmが使われています。



< 参考資料 >

1. H. R. Suiter著 Star Testing Astronomical Telescopes, Willmann-Bell, 1997の第3章、第9章
2. H. Rutten and Martin van Venrooij著 Telescope Optics, Willmann-Bell, 1989の第18章
3. Cloudy NightsのEquipment Discussionのスレッド “How to understand an MTF chart...”
<http://www.cloudynights.com/ubbthreads/showflat.php/Cat/0/Number/4415334/page/0/view/collapsed/sb/5/o/all/fpart/all/vc/1>
4. Fourier Optics (Image Evaluation)(日本語のweb)
http://eulersformula822.toypark.in/FourierOptics_ImageEvaluate.htm
5. MTFの測定—チャート法—
http://www.clg.niigata-u.ac.jp/~medimg/practice_medical_imaging/mtf/1chart/index.htm

END: MTFの話